УДК 16

Г. К. Ольховиков

О МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПОНЯТИЯ ИЗОМОРФНОГО ВЛОЖЕНИЯ ФОРМАЛИЗМОВ

Отмечается, что во многих интересных случаях при рассмотрении данной предметной области приходится иметь дело не с единичным формализмом, а с их системой. Утверждается, что такие системы связываются посредством изоморфных вложений их элементов. Изучаются некоторые варианты определения понятия формализма и соответствующие им определения изоморфного вложения формализмов. Без доказательства приводится ряд новых результатов относительно соотношений этих понятий.

This article suggests that, in many interesting cases when considering the given reference domain, one has to deal with a system of formalisms rather than a single formalism. It is argued that these systems are integrated through isomorphic embeddings of their elements into each other. The article considers some alternative notions of formalism and the definitions of isomorphic embeddings corresponding to them. A number of new results concerning their interrelations are presented without proofs.

Ключевые слова: формализм, изоморфное вложение.

Key words: formalism, isomorphic enclosure.

1. Две задачи

Инструменты современной логики предназначены для выполнения двух основных интеллектуальных задач — описания и дедукции. Идеалом описания становится полнота и однозначность, дедукции — удобство в обращении и эффективность. Поэтому идеалом, к которому стремится препарация любой данной предметной области средствами логики, можно считать создание формализма, совмещающего полное и однозначное описание с достаточно продуктивной и удобной в обращении системой выводов. Как известно, этот идеал недостижим почти во всех интересных случаях.

В таких случаях формализмы, которые могут быть построены средствами современной логики, разбиваются на две группы. Первая из них дает полное и однозначное описание предметной области, другая — частичное (или, по сути, вообще никакого), зато предоставляет в наше распоряжение эффективную систему выводов. Она представляет собой фрагмент совокупности всех выводов, правильных относительно определенной предметной области, которая сама по себе слишком велика, чтобы ее можно было сделать эффективной. Таким образом, формализмы первой группы оказываются достаточными (в смысле выразительных возможностей) но неэффективными, а формализмы второй группы — эффективными, но недостаточными. Для краткости будем в дальнейшем обозначать их как Д-формализмы и Э-формализмы соответственно.

Достоинством Э-формализмов становится удобство в применении — некоторые из них настолько просты, что работа с ними теоретически, а иногда и практически, доступна не только человеку, но и машине. Основная же их слабость — связь с предметной областью. Поскольку они не в состоянии ее полностью описать, получается, что такие формализмы в равной степени относятся как к указанной области, так и к классу других, «похожих» на нее в соответствующих отношениях. Предметная область — лишь одна из многих «возможных интерпретаций» Э-формализма, и нет никакой возможности выделить ее среди этих интерпретаций, не выходя за пределы формализма. Подобный формализм имеет не больше связи со своей предметной областью, чем мясорубка с перемалываемым в ней мясом: она способна перемалывать не только мясо, но и многие другие вещества. Точно так же выводы Э-формализма применимы и к его предметной области, и равным образом к любой другой из его возможных интерпретаций.

Достоинство Д-формализмов — как раз прочность их связи с подразумеваемой предметной областью или множеством предметных областей. У Д-формализмов именно столько «возможных интерпретаций», сколько подразумеваемых моделей. Но вот их использование часто невозможно не только для машины, но и для человека. В результате, например, классическая второпорядковая логика, позволяющая категорично описать предметные области большинства базовых математических теорий, расплачивается за это тем, что, по сути, не имеет собственной теории доказательств, заимствуя исчисления из первопорядковой логики[1].

Наконец, отметим, что группы Д- и Э-формализмов, описывающие данную предметную область, явно неравны по численности. Ведь полное и однозначное описание может быть только одно, тогда как эффективные фрагменты в таком описании могут выделяться разными способами. Число имеющих отношение к анализу предметной области Э-формализмов возрастает еще и за счет того, что мы, вообще говоря, не имеем единого критерия эффективности — в каких-то случаях достаточно рекурсивной перечислимости множества выводов, в других необходима его разрешимость, а в третьих — даже разрешимость за «линейное» время. Так что в нормальной ситуации один Д-формализм будет соотноситься со многими Э-формализмами.

---

[1] Ср.: «How can one distinguish between a proof calculus for a second-order logic on the one hand, and on the other hand a first-order proof calculus… The answer is easy: one can’t… It follows, incidentally, that it is quite meaningless to ask whether the proof theory of actual mathematics is first-order or higher-order» [4, p. 72].

2. Система формализмов

В перечисленных условиях выходом представляется попытка объединить Д-формализмы и Э-формализмы, относящиеся к данной предметной области, в систему, где одни из них будут компенсировать недостатки других, давая в целом наиболее полную и удобную репрезентацию среди возможных средствами современной логики. Поскольку главным признаком, на основе которого формализм причисляется к системе, становится его связь с указанной предметной областью в качестве подразумеваемой интерпретации, а такая предметная область фиксируется в рамках Д-формализма, то наличие у Э-формализмов связи с предметной областью равносильно наличию у них соответствующей связи с единственным Д-формализмом системы. Так что нашу систему естественно рассматривать как имеющую звездчатую структуру, пример которой показан на рисунке.

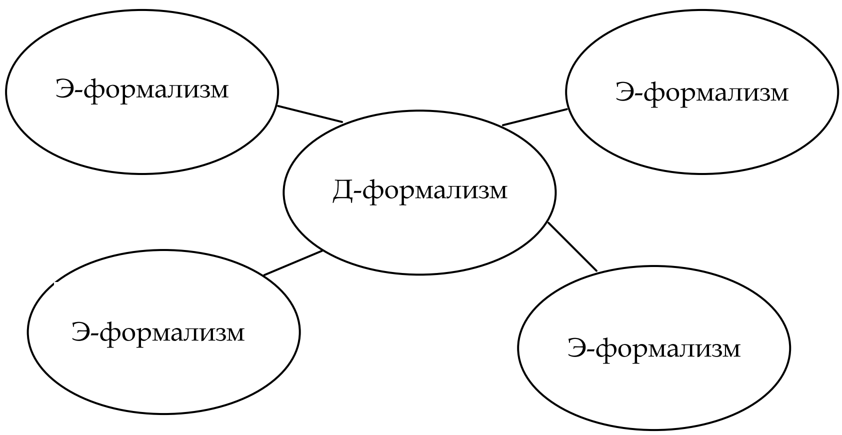

Рис. Структура системы формализмов

Примером системы формализмов, показанной на рисунке, может быть, скажем, совокупность формализмов, которые созданы для изучения арифметики натуральных чисел. В качестве Д-формализма здесь будет выступать любая категоричная второпорядковая аксиоматизация этой арифметики, а в качестве Э-формализмов — первопорядковые и сформулированные в еще более бедных языках корректные исчисления, основным достоинством которых оказывается удобная в том или ином отношении система доказательств.

Заменяя связи Э-формализмов системы с предметной областью соответствующими связями их с Д-формализмом системы, мы получаем возможность придать этой связи более четкую формулировку. Как уже было сказано, такая связь состоит, по сути, в том, что Э-формализмы представляют собой удобные в использовании фрагменты Д-формализма. Значит, связь Э-формализмов с Д-формализмом должна подтверждать тождество с точностью до изоморфизма данного Э-формализма соответствующему фрагменту Д-формализма. При таких требованиях к ней она может представлять собой только тот или иной вариант изоморфного вложения Э-формализма в Д-формализм.

Экспликация связей в системе формализмов в качестве изоморфных вложений сразу же вносит два усложнения в нашу до того стройную и простую картину. В своей исходной форме понятие изоморфного вложения определено для алгебраических систем (стандартное определение см. в работе [3, с. 61]). Но, во-первых, не совсем понятно, какого рода алгебраической системой оказывается формализм. Разные его определения могут, как мы покажем, приводить к существенно различным результатам. Во-вторых, одна и та же структура может изоморфно вкладываться в разные фрагменты другой структуры. Так что полная характеристика места данного Э-формализма в системе должна включать все его возможные вложения в соответствующий Д-формализм. Представление системы формализмов в виде графа, подобного изображенному на рисунке, становится в этих условиях слишком упрощенным.

3. Что есть формализм?

Понятие формализма не относится к числу понятий с общепринятым четким определением. Однако ясно, что формализм должен включать множество формул некоторого формального языка. В дальнейшем мы будем для краткости отождествлять язык с его множеством формул. Язык мы понимаем максимально широко, т. е. как некоторое множество слов (не обязательно конечных) над некоторым алфавитом. Формальным языком будем считать алгоритмически разрешимый язык. Собственно, мы можем ограничить область формализма теоретико-множественными конструкциями над множеством формул, если отождествим формализм с дедуктивной системой в смысле А. Тарского. Тогда может быть дано следующее определение формализма.

Определение 1. Пусть L — формальный язык. *Формализмом-1* называется упорядоченная пара $\langle L \cup 2^L; R\rangle$, где $R \subseteq 2^L \times L$ и для любых $\varphi \in L$, Γ, $\Theta \subseteq L$ удовлетворяет таким условиям:

1) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow R(\Gamma, \varphi)$;

2) $R(\{\psi \mid R(\Gamma, \psi)\}, \varphi) \Rightarrow R(\Gamma, \varphi)$;

3) $(\Theta \subseteq \Gamma \;\&\; R(\Theta, \varphi)) \Rightarrow R(\Gamma, \varphi)$.

Условия (1—3) суть известные из работ Тарского условия рефлексивности, идемпотентности и монотонности. Мы не стали включать в определение другие условия, которые можно встретить у Тарского, поскольку они либо предполагают возможность выразить в рамках данного формализма некоторые фрагменты классической логики высказываний, либо накладывают нетривиальные ограничения на отношение логического следования, что, на наш взгляд, неоправданно сужает область структур, которые могут быть отнесены к формализмам.

Применительно к формализмам-1 понятие изоморфного вложения принимает вид, указанный ниже.

Определение 2. Пусть L_1, L_2 — формальные языки; $\langle L_1 \cup 2^{L1}; R_1\rangle$, $\langle L_2 \cup \cup 2^{L2}; R_2\rangle$ — формализмы-1. Тогда инъекция π: $L_1 \to L_2$ есть *изоморфное* *вложение* $\langle L_1 \cup 2^{L_1}; R_1\rangle$ в $\langle L_2 \cup 2^{L_2}; R_2\rangle$, е. т. е. для любых $\varphi \in L_1$, $\Gamma \subseteq L_1$ верно, что $R_1(\Gamma, \varphi) \Leftrightarrow R_2(\pi(\Gamma), \pi(\varphi))$.

Таким образом, понятие изоморфного вложения, как оно определено, например, в работе [1, с. 165], приближается к понятию перевода одной логики в другую.

Понятие формализма-1 выглядит естественно, укоренено в логической традиции и минимально в том смысле, что обходится лишь формулами соответствующего языка и теоретико-множественными конструкциями над ними. Семантика такого формализма при этом не входит в его определение явным образом; мы можем судить о ней лишь по той «тени», которую она отбрасывает на формулы языка, индуцируя на них отношение логического следования. Однако с точки зрения использования этого понятия для придания единства рассмотренным выше системам формализмов оно обладает важным недостатком: может устанавливать связь между формализмами, имеющими различные ожидаемые интерпретации. Иными словами, при таком понимании изоморфного вложения с данным Д-формализмом будут связаны некоторые Э-формализмы, которые не предполагалось интерпретировать на описываемой этим Д-формализмом предметной области. А у некоторых Э-формализмов, имеющих отношение к предметной области данного Д-формализма, появятся дополнительные связи с ним, которые противоречат их стандартной интерпретации. Образец таких дополнительных связей — «нестандартные переводы» систем силлогистики в полную первопорядковую логику (см., например: [2]).

Учитывая указанный недостаток, можно попробовать пойти в экспликации понятия формализма другим путем: вместо понимания его как множества формул и их множеств, упорядоченных отношением следования, развить понятие формализма в качестве множества формул, соотнесенных с их подразумеваемой интерпретацией. Не совсем ясно, однако, как представить семантику формализма в общем виде. Какие семантические конструкции имеют общее значение, а какие представляют собой особенность выбранной логической системы? Ниже мы предлагаем три варианта описания семантики формализма вообще, двигаясь от наиболее широкого описания к наиболее узкому (в экстенсиональном смысле), и определяем соответствующие им понятия изоморфного вложения формализмов.

Любая семантика предполагает наличие некоторого множества точек соотнесения, в которых формулы получают истинностные значения. Например, в модальной пропозициональной логике точками соотнесения будут упорядоченные тройки вида (шкала Крипке, элемент шкалы, оценка пропозициональных переменных); в первопорядковой логике — пары (модель, оценка индивидных переменных) и т.д. Предполагая, что семантика формализма сводится к связям формул с точками соотнесения, мы можем сформулировать следующее его понимание.

Определение 3. Пусть L — формальный язык; M — произвольное множество, не пересекающееся с L, $V \subseteq M \times L$. *Формализмом-2* называется упорядоченная тройка $\langle L, M, V\rangle$.

Здесь M — множество точек соотнесения данного формализма, соответствующих его подразумеваемым интерпретациям, а V представляет отношение выполнения формулы в данной точке соотнесения. Соответствующее формализму-2 понятие изоморфного вложения выглядит приведенным ниже образом.

Определение 4. Пусть $\langle L_1, M_1, V_1\rangle$, $\langle L_2, M_2, V_2\rangle$ — формализмы-2. Тогда $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ является изоморфным вложением $\langle L_1, M_1, V_1\rangle$ в $\langle L_2, M_2, V_2\rangle$, е. т. е. π_1: $L_1 \to L_2$, π_2: $M_1 \to M_2$ — инъекции и для любых $\varphi \in L_1$, $m \in M_1$ верно, что $V_1(m, \varphi) \Leftrightarrow V_2(\pi(m), \pi(\varphi))$.

Вместе с тем наличие множества точек соотнесения, на наш взгляд, не единственный элемент семантики, имеющий универсальный характер. За точками соотнесения всегда присутствуют модели, к которым эти точки относятся. Даже те случаи, когда вроде бы никакой модели «за» данной точкой соотнесения не стоит, можно истолковать как вырожденные варианты этой схемы, где каждая модель включает ровно одну точку соотнесения. Чтобы обойтись без расширения основного множества алгебраической системы, представляющей формализм, будем представлять модели как классы эквивалентности по отношению «принадлежать к одной и той же модели» на множестве точек соотнесения. Тогда определение формализма примет следующий вид.

Определение 5. Пусть $\langle L, M, V\rangle$ — формализм-2; S — эквивалентность на M. *Формализмом-3* называется упорядоченная четверка $\langle L, M, V, S\rangle$.

Определение изоморфного вложения в таких условиях придется дополнить данным ниже очевидным образом.

Определение 6. Пусть $\langle L_1, M_1, V_1, S_1\rangle$, $\langle L_2, M_2, V_2, S_2\rangle$ — формализмы-3. Тогда π является *изоморфным вложением* $\langle L_1, M_1, V_1, S_1\rangle$ в $\langle L_2, M_2, V_2, S_2\rangle$, е. т. е. π изоморфно вкладывает $\langle L_1, M_1, V_1\rangle$ в $\langle L_2, M_2, V_2\rangle$ в смысле определения 4, и при этом для любых $m_1, m_2 \in M_1$ имеет место $S_1(m_1, m_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow S_2(\pi(m_1), \pi(m_2))$.

Последним элементом семантики, который мы хотели бы учесть в нашем определении формализма в качестве имеющего универсальное распространение, становится тот факт, что модели формализмов обычно не просто представляют собой некие скопления точек соотнесения, но обладают некой внутренней структурой, т. е. сами являются алгебраическими системами. С учетом этого факта мы предлагаем модифицировать понятие формализма следующим образом.

Определение 7. Пусть $\langle L, M, V, S\rangle$ — формализм-3; Σ — сигнатура; $AS(\Sigma)$ — некоторое множество алгебраических систем сигнатуры Σ; ∇: $M \to AS(\Sigma)$ — функция, такая, что для любых $m_1, m_2 \in M$ имеет место $\nabla(m_1) = \nabla(m_2)$, е. т. е. $S(m_1, m_2)$. Тогда упорядоченная пятерка $\langle L, M, V, S, \nabla\rangle$ — *формализм-4*.

Нам представляется наиболее удачной данная ниже модификация определения понятия изоморфного вложения применительно к понятию формализма-4.

Определение 8. Пусть $\langle L_1, M_1, V_1, S_1, \nabla_1\rangle$, $\langle L_2, M_2, V_2, S_2, \nabla_2\rangle$ — формализмы-4. Тогда π является *изоморфным вложением* $\langle L_1, M_1, V_1, S_1, \nabla_1\rangle$ в $\langle L_2, M_2, V_2, S_2, \nabla_2\rangle$, е.т.е. π изоморфно вкладывает $\langle L_1, M_1, V_1, S_1\rangle$ в $\langle L_2, M_2, V_2, S_2\rangle$ в смысле определения 6 и при этом для любого $m \in M$, $\nabla_1(m)$ изоморфно некоторой подструктуре $\nabla_2(\pi(m))$.

4. Результаты

Естественно задаться вопросом о соотношении четырех описанных выше вариантов понятия изоморфного вложения. Сравнение их несколько осложняется тем, что все эти понятия определены для различных понятий формализма. В качестве общего основания для их сравнения мы считаем удобным взять совокупность формализмов-4. Определения 6 и 4 переносятся на них очевидным образом, а определение 2 может быть связано с ними посредством указанной ниже вспомогательной конструкции.

Определение 9. Пусть $\lambda = \langle L, M, V, S, \nabla\rangle$ — формализм-4. Для произвольных $\varphi \in L$, Γ, $\Theta \subseteq L$, φ λ-следует из Γ, е.т.е. $\forall m \in M(\forall\psi \in \Gamma(V(m, \psi)) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(m, \varphi))$.

Может быть доказано следующее.

Предложение 1. Пусть $\lambda = \langle L, M, V, S, \nabla\rangle$ — формализм-4. Тогда отношение λ-следования удовлетворяет условиям (1—3) из определения 1.

Заметим, что отношение λ-следования может быть определено и в том случае, если λ представляет собой формализм-2 или -3, причем в каждом из этих случаев будет также верен аналог предложения 1.

Итак, любому формализму-4 однозначно соответствует некий формализм-1, возникающий на основе того же формального языка и отношения следования, индуцируемого этим формализмом в смысле определения 9. Связи между изоморфными вложениями этих формализмов могут быть охарактеризованы следующим образом.

Предложение 2. Пусть $\lambda_1 = \langle L_1, M_1, V_1, S_1, \nabla_1\rangle$, $\lambda_2 = \langle L_2, M_2, V_2, S_2, \nabla_2\rangle$ — формализмы-4; R_1, R_2 — отношения λ_1-следования и λ_2-следования соответственно; π изоморфно вкладывает $\langle L_1, M_1, V_1, S_1, \nabla_1\rangle$ в $\langle L_2, M_2, V_2, S_2, \nabla_2\rangle$ в смысле определения N, где $N \in \{4, 6, 8\}$. Тогда верны следующие утверждения:

1) для любых $\varphi \in L_1$, $\Gamma \subseteq L_1$ имеет место $R_1(\Gamma, \varphi) \Leftarrow R_2(\pi(\Gamma), \pi(\varphi))$;

2) π, вообще говоря, не является изоморфным вложением $\langle L_1 \cup 2^{L1}; R_1\rangle$ в $\langle L_2 \cup 2^{L2}; R_2\rangle$.

Итак, предложение 2 показывает, что вводимые определениями 4, 6 и 8 понятия изоморфного вложения хотя и устанавливают некую нетривиальную связь между отношениями следования в связываемых этими вложениями формализмах, все же не обеспечивают полного совпадения таких отношений. Заметим, однако, что предложение 2 еще не решает вопроса об изоморфной вложимости одного формализма в другой в смысле определения 2 при условии его вложимости в смысле какого-либо из трех остальных определений. Оно показывает лишь, что отображение, изоморфно вкладывающее один формализм в другой в смысле этих определений, не всегда может рассматриваться как изоморфное вложение в смысле определения 2. Но из него еще не следует, что возможна ситуация, когда при существовании вложения одного формализма в другой в смысле определений 4, 6 или 8 первый формализм не может быть вложен во второй в смысле определения 2. Обозначенная проблема остается открытой.

Подобные более сильные утверждения могут быть сделаны относительно взаимных отношений между понятиями изоморфного вложения в смысле определений 4, 6 и 8. Очевидно, что в области формализмов-4 объемы этих понятий образуют невозрастающую последовательность, т. е., например, всякое изоморфное вложение, соответствующее определению 8, автоматически оказывается изоморфным вложением в силу определений 6 и 4. Следующее предложение показывает, что эта последовательность в некотором роде даже строго убывающая.

Предложение 3. Пусть λ_1, λ_2 — формализмы-4. Тогда верны такие утверждения:

1) из изоморфной вложимости λ_1 в λ_2 в смысле определения 4, вообще говоря, не следует их изоморфная вложимость в смысле определения 6;

2) из изоморфной вложимости λ_1 в λ_2 в смысле определения 6 не следует их изоморфная вложимость в смысле определения 8.

5. Методологические выводы

Кратко суммируем то, что нам удалось установить выше. При изучении сколько-нибудь интересных с точки зрения той или иной науки предметных областей средствами современной логики мы не имеем возможности объединить эффективные выводы и полные описания в рамках одного формализма. В таких ситуациях нам приходится иметь дело с системами формализмов, однако на первый взгляд не совсем понятно, какие именно формализмы входят в эти системы и что придает им единство. Анализ отношений между Д-формализмами и Э-формализмами в рамках указанных систем показывает, что основным типом связи в этом случае оказывается тот или иной вариант изоморфного вложения. Но выработка его единого определения затруднена отсутствием согласия в понимании формализма. Существующее со времен Тарского понятие дедуктивной системы является одним из претендентов на экспликацию понятия формализма, однако не имеет всех тех свойств, наличия которых было бы желательно добиться от такого понятия в интересах изучения вышеописанных систем.

В качестве альтернативы понятию дедуктивной системы мы предложили несколько преимущественно семантических понятий формализма, связав с каждым из них соответствующее понятие изоморфного вложения. Особо важно среди них понятие формализма-4, позволяющее сравнить все варианты понятия изоморфного вложения, рассмотренные выше. В области формализмов-4 все изученные варианты понятия изоморфного вложения имеют различный объем, следовательно, связи внутри системы таких формализмов имеют не только количественное, но и высокое качественное разнообразие. Соответственно, мы считаем возможным рекомендовать понятие формализма-4 в качестве основного при изучении систем формализмов.

Кроме того, хотелось бы особо выделить понятие формализма-2. В ситуации повторяющихся попыток «обобщения» классической логики с целью «вынесения за скобки» всех и всяческих предзаданных принципов[2]

---

[2] В русле этих тенденций находятся, например, исследования по универсальной логике Ж.-И. Безье.

было бы интересно отметить, что это понятие не подразумевает абсолютно никаких ограничений на вид алгебраической системы, представляющей собой формализм, и тем не менее на основе этого понятия может быть, как показывает предложение 1, однозначно определено отношение, обладающее всеми главными свойствами классического отношения следования. Нельзя ли рассматривать этот результат как некую, пусть частичную, апологию универсального характера классической логики?

Список литературы

1. *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып. 11. М., 2004. С. 149—171.

2. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.

3. *Справочная* книга по математической логике: в 4 ч. М., 1982. Ч. 1.

4. *Hodges W.* Elementary predicate logic // Handbook of philosophical logic. 2nd ed. Vol. 1. Springer, 2001. P. 1—130.

Об авторе

Григорий Константинович Ольховиков — канд. филос. наук, доц., ст. науч. сотр., Уральский государственный университет им. А.М. Горького, e-mail: grigory.olkhovikov@usu.ru

About author

Dr. Grigory K. Olkhovikov, Associate Professor, Senior Research Fellow, Department of Ontology and Epistemology, A.M. Gorky Ural State University, e-mail: grigory.olkhovikov@usu.ru

УДК 140.8(08)

Л.С. Сироткина

ТИПОЛОГИЯ ПРОЦЕДУР ОПЕРИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯМИ

Формулируются проблемы анализа процесса оперирования понятиями. Анализируется множество понятийных процедур, выделяются основания их типологизации. Приводятся различные классификации процедур оперирования понятиями.

This article formulates the problems of concept process analysis. The author analyses a set of concept procedures and identifies the bases for their classification. Different classifications of concept procedures are presented in article.

Ключевые слова: понятие, оперирование понятиями, классификация.

Key words: concept, handling concepts, classification.